WISKUNDE B · OKTOBER · VOOR DE BEGELEIDER

Vergelijkingen oplossen

Antwoorden en toelichting bij de tien opgaven onder *Zelf proberen*. Elke uitkomst is nagerekend met sympy. Per opgave staat erbij wat de opgave toetst, wat je kunt doorvragen en waar het meestal fout gaat. De aparte examenvraag onder de tien opgaven valt buiten dit blad.

De rode draad van deze set. Oplossen is bij vwo B zelden het hele werk. Bijna elke opgave kent waarden die je er later weer uit moet halen: een noemer die niet nul mag zijn, een wortel die niet negatief mag worden, een logaritme die een positief getal nodig heeft, of een e-macht die nooit nul wordt. Zeven van de tien draaien daarom. Als hij één gewoonte meeneemt, is het deze: schrijf de voorwaarden óp vóór je gaat rekenen, en controleer je oplossingen erna.

Waarom er e en ln in zitten. De examenvraag onder deze opgaven is Wiskunde B 2023-II vraag 7: twee grafieken met e-machten die elkaar twee keer snijden, exact te berekenen, 4 punten. In de oude set kwam *geen enkele* opgave met e of ln voor. Opgave 2, 6, 7, 8 en 10 dekken dat gat nu, en opgave 10 is de examenvraag in het klein.

Exact rekenen en de abc-formule

1. Los exact op: $2x^2 - 5x - 1 = 0$

$x = (5 \pm \sqrt{33}) / 4$

$D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 25 + 8 = 33$. Ontbinden lukt niet netjes, dus de abc-formule.

Wat het toetst: het woord *exact*. 33 is geen kwadraat, dus de wortel blijft staan. Schrijft hij −0,186 en 2,686, dan is het antwoord niet exact en levert het geen punten op, ook al klopt het getal.

Doorvraag: “Wanneer mág je wel een decimaal antwoord geven?” Als de vraag erom vraagt (“in twee decimalen”) of als er geen wortel overblijft. Vergelijk met opgave 6, waar allebei gevraagd wordt.

Waar het misgaat: de min voor de c kwijtraken, dus $D = 25 - 8 = 17$ in plaats van $25 + 8 = 33$. Laat hem a, b en c eerst apart opschrijven mét hun teken.

---

9. Voor welke a heeft $x^2 + ax + 9 = 0$ precies één oplossing?

$a = 6$ of $a = -6$

$D = a^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = a^2 - 36 = 0$, dus $a^2 = 36$.

Wat het toetst: dat hij niet de vergelijking oplost maar een voorwaarde erover. Precies één oplossing betekent discriminant nul. Controle bij $a = 6$: $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$, dus $x = -3$ dubbel.

Doorvraag: “En voor welke a zijn er twee oplossingen? En nul?” Twee bij $a^2 > 36$, dus $a < -6$ of $a > 6$. Nul bij $-6 < a < 6$. Zo zie je dat de discriminant een hele familie beschrijft.

Waar het misgaat: alleen $a = 6$ opschrijven. $a^2 = 36$ heeft twee oplossingen. Dezelfde fout als bij $x^2 > 4$ in andere opgaven: de negatieve tak vergeten.

Breuken, wortels en logaritmen: wat mag er niet?

Opgave 3, 4 en 8 zijn drie keer dezelfde les. Bij een breuk mag de noemer niet nul zijn; bij een wortel moet de rechterkant niet negatief zijn; bij een logaritme moet het argument positief zijn. Drie verschillende oorzaken, één gewoonte: voorwaarden vooraf, controle achteraf. Bespreek ze achter elkaar, dan ziet hij het patroon.

3. Los op: 3/(x − 1) = 2/(x + 2)

x = −8 · met x ≠ 1 en x ≠ −2

Kruislings: $3(x + 2) = 2(x - 1) \rightarrow 3x + 6 = 2x - 2 \rightarrow x = -8$. Toegestaan, dus hij telt.

Wat het toetst: de uitgesloten waarden, en dat je ze opschrijft vóór je rekent. Hier loopt het goed af, maar dat weet je pas als je het nagaat.

Doorvraag: “Stel dat er x = 1 was uitgekomen. Wat dan?” Dan valt die oplossing af en heeft de vergelijking er geen. Dat is een geldig antwoord; leerlingen denken vaak dat er altijd iets uit moet komen.

Waar het misgaat: de voorwaarden pas noemen als het antwoord er staat, of helemaal niet. Op een examen is dat een aftrekpunt, ook als het antwoord klopt.

---

4. Los op: √(x + 7) = x − 5

x = 9 · x = 2 is een schijnoplossing

Kwadrateren: $x + 7 = x^2 - 10x + 25 \rightarrow x^2 - 11x + 18 = 0 \rightarrow (x - 2)(x - 9) = 0$.

controle	links	rechts	
x = 2	√9 = 3	2 − 5 = −3	klopt niet
x = 9	√16 = 4	9 − 5 = 4	klopt

Wat het toetst: dat kwadrateren oplossingen kan toevoegen. Een wortel is nooit negatief, dus de rechterkant mag dat ook niet zijn. Hij kan het ook vooraf zien: uit $x - 5 \geq 0$ volgt $x \geq 5$, en daar valt x = 2 al op af.

Doorvraag: “Kun je zonder te rekenen al zeggen dat x = 2 niet kan?” Ja, via $x \geq 5$. Dat scheelt werk en is net zo geldig.

Waar het misgaat: beide oplossingen opschrijven zonder controle. Dit is de klassieke wortelvalkuil en op het examen bijna altijd een apart punt.

---

8. Los op: ln(x) + ln(x − 3) = ln(10)

x = 5 · x = −2 valt af · voorwaarde x > 3

$\ln(x(x - 3)) = \ln(10) \rightarrow x(x - 3) = 10 \rightarrow x^2 - 3x - 10 = 0 \rightarrow (x - 5)(x + 2) = 0$.

Wat het toetst: de logaritmeregel én het domein. Binnen een logaritme moet het positief zijn, dus $x > 0$ en $x - 3 > 0$; samen $x > 3$. Daar valt $x = -2$ op af. Controle bij x = 5: ln(5) + ln(2) = ln(10).

Doorvraag: “Waarom is x > 0 niet genoeg?” Omdat ln(x − 3) ook moet bestaan. Bij x = 1 is ln(1) prima, maar ln(−2) niet. Twee logaritmen betekent twee voorwaarden.

Waar het misgaat: x > 0 opschrijven in plaats van x > 3, en dan x = −2 wél afstrepen maar om de verkeerde reden. Of de logaritmen los uitwerken en bij ln(x) · ln(x − 3) uitkomen — optellen wordt vermenigvuldigen *binnen* de logaritme, niet erbuiten.

Exponentieel: eerst grondtal, dan logaritme

5. Los op: 9^(x+1) = 27^(x−1)

x = 5

$9 = 3^2$ en $27 = 3^3$, dus $3^{(2x+2)} = 3^{(3x-3)}$. Gelijke grondtallen → $2x + 2 = 3x - 3 \rightarrow x = 5$.

Wat het toetst: dat hij eerst kijkt of gelijk grondtal maken lukt. Dan heb je geen logaritme nodig en blijft het antwoord een heel getal.

Doorvraag: “Had je dit ook met ln kunnen doen?” Ja: ln van beide kanten geeft (x+1)·ln9 = (x−1)·ln27, en daar komt ook 5 uit. Alleen is het meer werk. Vergelijk met opgave 6, waar het niet anders kan.

Waar het misgaat: de haakjes vergeten: 3^(2x+2) wordt 3^(2x) + 2. De exponent gaat in zijn geheel keer 2.

---

6. Los exact op: 5^x = 12, en geef de waarde in twee decimalen.

x = $^5\log(12)$ = log(12)/log(5) = ln(12)/ln(5) · x ≈ 1,54

Wat het toetst: twee dingen tegelijk: het exacte antwoord is de logaritme zelf, en het benaderde antwoord is 1,54. De vraag wil allebei, en dat is op een examen gebruikelijk.

Doorvraag: “Maakt het uit of je log of ln neemt?” Nee, zolang hij het boven én onder doet; het grondtal valt weg. Dat staat uitgelegd in het intermezzo bij Machten en logaritmen. Haalt hij ze door elkaar — ln boven, log onder — dan komt er 2,30 keer te veel uit.

Waar het misgaat: alleen 1,54 opschrijven bij “exact”. Of $^5\log(12)$ intypen als log(12)/log(5) maar dan log en ln mengen.

e-machten: de brug naar de examenvraag

2. Los op: (x² − 4) · e^x = 0

x = −2 of x = 2

Wat het toetst: dat een e-macht nooit nul wordt. Een product is nul als een factor nul is, maar e^x = 0 heeft geen oplossing: de grafiek nadert y = 0 zonder die te raken. Dus alleen $x^2 - 4 = 0$ telt.

Doorvraag: “Hoe weet je zeker dat e^x nooit nul is?” Omdat y = 0 de horizontale asymptoot is. Vraag daarna: “en e^x = −3?” Ook geen oplossing. Zo wordt het een eigenschap in plaats van een regel.

Waar het misgaat: “e^x = 0 dus x = 0” opschrijven, en dan drie oplossingen geven. Laat hem e^0 uitrekenen: dat is 1, niet 0.

7. Los exact op: e^(2x) − 5e^x + 6 = 0

x = ln(2) of x = ln(3)

$u = e^x$ geeft $u^2 - 5u + 6 = 0 \rightarrow (u - 2)(u - 3) = 0 \rightarrow u = 2$ of $u = 3$. Terug: $e^x = 2 \rightarrow x = \ln 2$; $e^x = 3 \rightarrow x = \ln 3$.

Wat het toetst: substitutie, en de controle dat u positief moet zijn. Hier vallen beide waarden binnen, maar dat moet hij wél nagaan.

Doorvraag: “Stel dat er $u = -1$ was uitgekomen. Wat dan?” Die valt af, want e^x is nooit negatief. Dat is precies dezelfde eigenschap als in opgave 2, nu in een andere rol.

Waar het misgaat: e^(2x) lezen als 2e^x in plaats van $(e^x)^2$. Laat hem $x = 1$ invullen: $e^2 \approx 7{,}39$ tegenover $2e \approx 5{,}44$.

10. f(x) = e^x en g(x) = 6 − e^(−x) snijden elkaar twee keer. Bereken de x-coördinaten exact.

x = ln(3 + 2√2) of x = ln(3 − 2√2) · ongeveer ±1,763

$e^x = 6 - e^{(-x)}$. Keer e^x: $e^{(2x)} = 6e^x - 1 \rightarrow e^{(2x)} - 6e^x + 1 = 0$.

$u = e^x$: $u^2 - 6u + 1 = 0 \rightarrow D = 32 \rightarrow u = (6 \pm \sqrt{32})/2 = 3 \pm 2\sqrt{2}$.

Twee dingen die hier samenkomen. Vermenigvuldigen met e^x mag zonder voorbehoud, juist omdat e^x nooit nul is (opgave 2). En beide u-waarden zijn positief — $3 - 2\sqrt{2} \approx 0{,}17$ — dus geen van beide valt af (opgave 7). Komt er één negatieve uit, dan is er maar één snijpunt.

Mooie controle: $(3 + 2\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2}) = 9 - 8 = 1$. De twee getallen zijn elkaars omgekeerde, dus de logaritmen zijn elkaars tegengestelde: +1,763 en −1,763. De snijpunten liggen symmetrisch om de y-as. Dat is een gratis controle op zijn antwoord.

Doorvraag: “Waarom liggen die symmetrisch?” Omdat g(x) uit f(x) ontstaat door spiegelen en verschuiven; wie dat ziet, had het antwoord kunnen voorspellen.

Waar het misgaat: $\sqrt{32}$ niet vereenvoudigen tot $4\sqrt{2}$ en blijven zitten met $(6 \pm \sqrt{32})/2$. Of de deling door 2 maar op één term toepassen: $3 \pm \sqrt{32}$ in plaats van $3 \pm 2\sqrt{2}$.

Verbanden en herkomst

Waar deze tien naartoe werken. De zes soorten vergelijkingen van deze pagina komen op het examen zelden los voor. Ze zitten verstopt in een vraag over snijpunten, over een nulpunt van een afgeleide, of over een model. Daarom eindigt de set met twee grafieken die elkaar snijden: dat is de vorm waarin hij het terugziet.

opgave	oefent vooral	hangt samen met
1, 9	abc-formule en discriminant	exact rekenen, hele jaar
3, 4, 8	voorwaarden vooraf, controle achteraf	ongelijkheden, 14 oktober

5, 6	gelijk grondtal of logaritme	machten en logaritmen, september
2, 7, 10	e-machten en substitutie	de examenvraag van deze pagina

Herkomst van de antwoorden. De tien opgaven staan in wiskunde/vergelijkingen.html, onderdeel “Zelf proberen”. Alle uitkomsten zijn symbolisch opgelost met sympy 1.14 en daarna teruggecontroleerd. Bij opgave 4 en 8 is apart nagegaan wélke oplossing afvalt en waarom: na kwadrateren geeft opgave 4 $x = 2$ en $x = 9$, na wegwerken van de logaritme geeft opgave 8 $x = -2$ en $x = 5$. Bij opgave 10 is ook numeriek gecontroleerd: $\pm 1{,}762747$, en het product van de twee u-waarden is exact 1. Er is geen externe bron gebruikt; alles volgt uit de opgaven zelf.